Transfert thermique

Flux de chaleur : Loi de Fourier (1768 : Auxerre – 1830 : Paris)

La conduction de la chaleur dans les solides fut en premier lieu examinée par Newton vers 1701, puis en 1703 par le Français Guillaume Amontons.

1741, le Suédois Anders Celsius proposa la première échelle centigrade pour laquelle, le 0 correspond à l'eau bouillante et le 100 correspond à la glace fondante. Les deux valeurs furent interverties en 1745 par son compatriote linné.

1822 Joseph Fourier, adapta sa théorie analytique de la chaleur.

Introduction

La chaleur est une forme de l'énergie d'un système. D'après la thermodynamique, nous savons que l'énergie ne peut être créée ou détruite, mais simplement « déplacée » d'une forme vers une autre. Attention, ce raisonnement peut être dangereux : il est vrai que les formes de l'énergie sont interchangeables en principe, mais elles ne sont pas toutes du même ordre de grandeur. Jusqu'à maintenant, on n'a jamais réussi à faire frire un oeuf en lui tapant dessus à coups de marteau ! Si la thermodynamique traite des transformations de l'énergie, le transfert de chaleur traite des débits de transfert de chaleur, c'est-à-dire de la relation qui existe entre le temps et les quantités de chaleur transférées pendant ce temps. D'après les chapitres précédents, on sait que l'énergie est une des variables fondamentales des systèmes étudiés. Mais il n'existe pas « d'énergiemètre ». Il faut donc définir les variables caractéristiques du système qui vont permettre la mesure de l'énergie. La température T est le principal paramètre utilisé. La chaleur est donc une forme d'énergie qui est transférée dans un système à travers une surface de contrôle lorsqu'une différence de température existe entre le volume de contrôle et son environnement. Le transfert de chaleur commence donc lorsqu'il y a un gradient de température. Si l'on connaît la relation entre le gradient de température et le flux de chaleur, celui-ci peut être calculé à partir de mesures ou d'estimations de température. Rappelons qu'un flux de chaleur est défini comme une quantité de chaleur par unité de temps et par unité de surface.

II est traditionnel de diviser le transfert de chaleur en trois modes de transmission : la conduction, la convection et le rayonnement. Cette division est bien sûr artificielle. La chaleur est toujours transférée selon les trois modes simultanément. Toutefois, lorsque la combinaison des trois modes fait apparaître un mode prédominant, l'analyse du phénomène se fait alors comme si seul le mode prédominant existait. Nous les présenterons rapidement dans un premier temps. Le lecteur ne perdra cependant pas de vue que notre raisonnement reste le même. Ainsi, nous leur appliquerons ensuite l'analyse dimensionnelle et les bilans sur des volumes de contrôle macro ou microscopiques.

LES MODES DE TRANSFERT DE CHALEUR

Le lecteur peut se rendre compte très facilement des trois modes de transfert de chaleur en prenant son petit-déjeuner. Le grille-pain dore le pain grâce au rayonnement, essentiellement infrarouge, qu'émettent ses résistances rougies par le passage du courant électrique. La chaleur produite par les filaments change aussi la masse volumique de l'air compris entre les résistances et le pain, produisant ainsi un courant de vapeur et d'air chaud ascendant qui peut parfois faire voir trouble au-dessus de l'appareil : c'est de la convection naturelle. Enfin, lorsqu'il se brûle la main en prenant son morceau de pain, il subit lors du contact main-pain un transfert de chaleur conductif.

La conduction

Elle implique un échange d'énergie par contact entre une région de température élevée vers une région de basse température. Elle ne s'effectue que dans des systèmes modélisés par un modèle i paramètres répartis, microscopique. Dans un fluide au repos macroscopique ou un solide quelconque les chocs entre molécules et atomes voisins sont responsables de ce transfert d'énergie cinétique microscopique. C'est un transfert de proche en proche par choc élastique où les particules de plus haute énergie en laisse une partie à celle de moindre énergie. Dans un métal, la présence d'électrons libres très mobiles concourt fortement à ce transfert conductif le long du réseau métallique. En effet leur faible masse est largement compensée par le fait que leur vitesse intervient au carré dam l'expression de l'énergie cinétique, alors qu'elle les rend négligeables dans un bilan de quantité do mouvement.

Nous avons vu au chapitre 5 que la loi de Fourier régit le phénomène. En géométrie monodimensionnelle :

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

avec :

x : Direction du gradient de température et de déplacement de la chaleur

$\dot{Q}_x$: Débit de chaleur par unité de temps (puissance thermique) **J/s = W**

λ : Coefficient de conduction thermique **W/(m.°C)**
caractéristique du matériau, parfois fonction de la température

A : Surface d'échange **m²**

T : Température - seule compte la différence - **°C ou K**

Nous donnons dans le diagramme du tableau 11 les valeurs des coefficients de conduction thermique des matériaux les plus communs en fonction de la température.

Matériaux	λ **W/m.K**
Acier inox	25,1
Aluminium	238
Brique	0,58-0,81
Caoutchouc	0,160-0,23
Ciment	0,3
Coton	0,059
Cuivre	372
Glace	2,25
Laine	0,036
Laine de verre	0,037
Laiton	113
Papier	0,12
Paraffiner	0,24
Plexiglas	0,184
Polyéthylène	0,25
Porcelaine	1,03
PVC	0,15
Téflon (PTFE)	0,23
Verre (pyrex)	1,06
Verre (vitre)	1,16

Conductivité thermique de différents matériaux

La convection

Tout chimiste a déjà utilisé un condenseur pour distillation. Dans cet appareil, l'eau en s'écoulant refroidit la paroi interne qui est elle-même au contact des vapeurs - d'où condensation. Le mouvement de l'eau permet donc un transfert de chaleur. Un tel transfert relève de la convection.

Si le fluide voit sa circulation imposée par un appareillage - ventilateur, pompe,... - le transfert de chaleur résulte d'une ***convection forcée***. Mais le mouvement du fluide peut résulter d'un effet de poussée d'Archimède. Soumis à une différence de température, le fluide reçoit de l'énergie par conduction ou rayonnement - cet apport d'énergie peut aussi provenir d'une transformation physico-chimique. Il se dilate et une différence de masse volumique 4p avec son entourage apparaît. Il se déplace et transfère alors la chaleur reçue par ***convection naturelle***. Les radiateurs d'habitation - que l'on appelle d'ailleurs très improprement radiateurs et de plus en plus souvent convecteurs - opèrent principalement selon ce principe. Pour permettre le mouvement de l'air en train de se réchauffer du bas vers le haut, il faut laisser un espace suffisant autour de l'appareil.

Comme il y a à la fois transfert de chaleur et de quantité de mouvement, le phénomène de convection est très complexe. Aussi, pour l'exploiter simplement entre un solide chaud en échange à travers une surface A avec un fluide plus froid, on définit un coefficient de transfert de chaleur par convection - la convectance h -, tel que :

$$\boxed{\mathbf{Q = h\,A\,(T\,f - T_S)}}$$

avec :

Q = Débit de chaleur à travers le solide S W (ou BTU. hr [1])

h = Coefficient de transfert de chaleur W/m °C

T_f = Température moyenne du fluide °C

T_S = Température à la surface du solide °C

T_c = Température moyenne du solide °C

$$\mathbf{T_f < T_s < T_c}$$

En cas de géométrie de la surface d'échange complexe ou variable, il est souvent intéressant de raisonner sur le flux de chaleur - Q/A, en W/m^2.

Des valeurs typiques de h sont données dans le tableau ci-dessous :

Fluide	**h W/m^2.°C**
Convection naturelle	6 - 28 (retenir 10)
Convection forcée	
Intérieur du tube	
Air	6 - 570
H_2O	284 – 17 000
H_2O ébullition	2840 – 57 000
Condensation de vapeur H_2O	5680 – 113 500

Le rayonnement

Nous avons vu précédemment que les transferts de chaleur par conduction et convection nécessitent un contact entre les fluides. Supposons maintenant que deux corps de températures différentes soient séparés par un vide parfait. Les modes de transfert conductif et convectif ne sont plus possibles. Or le soleil nous comble de ses bienfaits énergétiques à travers le vide interplanétaire. Ce transfert de chaleur résulte d'un rayonnement d'origine électromagnétique, dont ce que nous appelons la lumière fait partie.

Si nous nous plaçons dans l'hypothèse de Maxwell (théorie des ondes électromagnétiques), nous dirons qu'une énergie rayonnante est émise sous forme d'ondes électromagnétiques par tout corps présentant une température non absolument nulle. Dans le cadre de l'hypothèse de Planck, des photons seront porteurs du transfert d'énergie. Mais cette énergie sera d'autant plus forte que la température sera élevée, d'où un transfert global d'énergie du corps le plus chaud vers le plus froid.

L'émission ou l'absorption de rayonnement est un phénomène qui fait intervenir le corps entier, c'est-à-dire que les rayonnements sont formés à l'intérieur du corps et sont émis à travers la surface du corps. De même, les rayonnements qui passent à travers la surface sont plus ou moins absorbés par tout le corps (phénomène de masse) avec une atténuation en fonction de la profondeur. Si cette atténuation est très faible pour une longueur d'onde donnée, le corps sera dit transparent pour cette longueur d'onde. C'est ainsi que la plupart des tissus humains sont transparents aux rayons X, sauf les os ! Mais aussi que l'on peut être brûlé, au sens thermique du terme, par une mauvaise irradiation. Le cas le plus courant est le « coup de soleil ».

Toutefois, dans la pratique, l'atténuation des rayonnements par les solides opaques nous permettra de parler d'émission ou absorption de surface : il y a annulation des effets dans un solide thermiquement homogène. Dans le cas des gaz, le phénomène est bien sûr peu atténué par la pénétration dans leur masse, faible dans les cas industriels classiques, mais les histoires de « couche d'ozone » et « d'effet de serre » nous rappellent régulièrement qu'ils ont une influence sur les rayonnements.

Le flux de chaleur émis par rayonnement par un corps est proportionnel à T¢, où T est sa température absolue en **Kelvins**.

Soit un corps noir - corps absorbant ou émettant parfaitement -, de surface A et de température absolue T_i (K), contenu dans une enceinte de température T_2. Le débit d'énergie, en Watts, qui quitte le corps noir par rayonnement s'exprime comme la différence entre ce qu'il émet et ce qu'il reçoit : c'est la loi de Stefan.

$$\dot{Q} = A\,\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

avec A : Surface en m^2

σ : Constante de Stefan-Boltzmann = 5,6697 . 10^{-9} $W/m^2\,K^4$

Rq : Certains corps non noirs sont transparents, d'autres réfléchissants ou simplement gris, c'est-à-dire imparfaits du point de vue du rayonnement.

Pour l'ingénieur du Génie Chimique les problèmes de transferts thermiques se ramènent généralement à l'une ou l'autre des deux formes :

1. rechercher la manière la plus efficace de transmettre une quantité donnée de chaleur entre deux systèmes, par unité de temps
2. rechercher comment limiter les déperditions (ou les gains) calorifiques à travers une surface.

1. Conduction unidirectionnelle

On pose $\partial Q =$ énergie thermique : énergie thermique qui traverse pendant le temps **dt** une surface **dS** orthogonale à l'axe **ox** depuis la région chaude vers celle froide est proportionnelle à cette surface et d'autant plus grande que l'écart de température est plus grand.

On peut donc définir une densité de flux de chaleur $\mathbf{j_Q}$ telle que :

$$\boxed{j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}} \qquad \mathrm{W.m^{-2}}$$

Rq : le singe (-) indique que la transfert se fait de la région la plus chaude vers la région la plus froide.

Si dS n'est pas orthogonale à l'axe ox, la chaleur ∂Q qui la traverse pendant le temps dt est plus faible et : $\partial Q = j_Q \cos\alpha . dS . dt$ **,**

$$\partial Q = \vec{j}_Q . \vec{d}S . dt$$

2. Conduction multidirectionnelle

En général, la température du milieu varie selon 3 direction.

La puissance thermique qui traverse une surface dS est égale au flux du vecteur densité de flux de chaleur $\vec{j}_Q$ à travers cette surface :

$$P = \vec{j}_Q . d\vec{S} \qquad \text{soit} \qquad \partial Q = \vec{j}_Q . \vec{d}S . dt$$

Dans un milieu homogène et isotrope, $\vec{j}_Q$ est relié au champ de température par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q(M,t) = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{z}\right) = -\lambda \, \vec{grad}\, T(M,t)$$

Rq : Analogie entre la conductance de la chaleur et la conductance électrique.

T V (potentiel électrique)

$\vec{j}_Q$ $\vec{j}$ (densité de courant électrique)

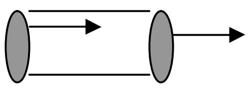
λ γ (conductance électrique)

Cependant le courant électrique implique un déplacement d'ensemble des électrons dans le conducteur alors que la conduction thermique ne fait intervenir que les échanges locaux d'énergie mécanique entre les atomes.

3. Bilan énergétique : équation de la chaleur

Conduction unidirectionnelle

Dans un milieu homogène de λ, masse volumique ρ et de chaleur massique C, nous isolant par la pensée un cylindre :



Pendant le temps dt, la matière contenue dans le cylindre reçoit de la chaleur par les deux bases de surface dS.

En x $\partial Q(x,t) = j_Q(x,t).dS.dt$

En $\partial Q(x+dx,t) = -j_Q(x+dx,t).dS.dt$

S'il existe une source de chaleur dans le cylindre libérant la puissance volumique P_v, cette matière reçoit la chaleur :

$$dQ_{vol} = P(x,t).dx.dS.dt$$

Origine de cette production de chaleur peut être :

- Effet Joule
- Une Réaction chimique
- Une désintégration radioactive

Tous ces transferts de chaleur provoquent une variation de température de la matière :

$$\boxed{\rho.C.dx.dS.dT}$$

Bilan :

$$\boxed{\partial Q(x,t)+\partial Q(x+dx,t)+\partial Q_{vol}=\rho.C.dx.dS.dT}$$

$$\left[j_Q(x,t)-j_Q(x+dx,t)\right]dS.dt+P(x,t).dx.dS.dt=\rho.C.dx.dS.dT$$

en enfin,

$$-\frac{\partial j_Q}{dx}.dt+P(x,t).dt=\rho.C.dT \qquad (6)$$

La loi de Fourier permet de relier la densité de flux de chaleur aux variations spatiales de température du milieu et d'obtenir ainsi l'équation aux dérivées partielles de la température :

$$\boxed{\lambda\frac{\partial^2 T}{dx^2}+P(x,t)=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (7)}$$

Equation e chaleur à une dimension : c'est une équation de diffusion, qui relie la dérivée spatiale seconde à la dérivée temporelle première.

Conduction multidirectionnelle

Isolant par la pensée un cube élémentaire dont l'un des sommets est le point M(x,y,z),

La relation (6) devient :

$$-\left[\frac{\partial j_{Qx}}{dx}+\frac{\partial j_{Qy}}{dy}+\frac{\partial j_{Qz}}{dz}\right].dt+P(x,y,z,t).dt=\rho.C.dT$$

soit, $$-div\,\vec{j}_Q+P(M,t)=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (8)$$

et la relation (7) devient :

$$\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{dx^2}+\frac{\partial^2 T}{dy^2}+\frac{\partial^2 T}{dz^2}\right]+P(x,y,z,t)=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t}$$

c-à-d :

$$\boxed{\lambda\ \Delta T+P(x,y,z,t)=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (9)}$$

C'est l'expression la plus générale de l'équation de la chaleur.

4. Résolution de l'équation de la chaleur

Pour résoudre un problème particulier de conduction, il ne suffit pas d'avoir établi son équation de la chaleur. Il est aussi nécessaire de tenir compte des conditions aux limites.

D'autre part, la recherche de la solution est facilitée par la connaissance des éventuelles symétries, invariances ou périodicités du système.

4.1 Système et invariance

Invariance dans le temps :

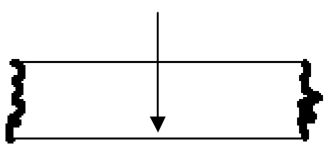
Il arrive que les températures extrême du milieux, de même que la chaleur dégagée par les sources éventuelles, restent constantes pendant une grande durée. Après un laps temps plus au moins long, un régime stationnaire s'établit, dans lequel la température de chaque point du milieu reste constante. L'équation de chaleur se réduit alors à une équation spatiale :

(9) devient : $\lambda.\Delta T+P(M)=0$ (10)

Rq : on reconnaît ici l'équation de Poisson de l'électrostatique.

Symétries et invariance dans l'espace :

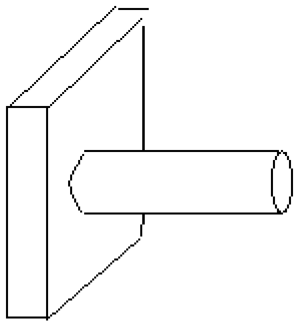
<u>Exemple 1</u> : Prenons l'exemple des variations diurnes de la température. Ces variations provoquent des transferts de chaleur dans le sol. On peut considérer que la température est uniforme dans tout plan horizontal.



La fonction T(x,y,z,t) devient simplement T(z,t)

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{dz^2}=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t}$$

Exemple 2 : Considérons maintenant une ailette de refroidissement cylindrique



Cette ailette est soudée à la paroi d'une enceinte portée à T_0. La température en un point M de l'ailette dépend :

- Distance z à la paroi
- Distance r à l'axe du cylindre
- Temps

A l'aide des coordonnées cylindrique l'équation (9) devient :

$$\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{dz^2}\right]=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation ne traduit pas les échanges de chaleur à la surface, qui sont de nature convective.

4.2 Conditions aux limites

Conditions aux limites dans le temps :

On parle alors de condition initiale.

On peut dire : T (x,y,z,t) = θ (x,y,z)

Conditions aux limites dans l'espace :

Ces conditions sont de deux types :

- La température est connue en certains points de la surface du milieu conducteur, dans le cas de l'ailette de refroidissement évoqué ci – dessus, la T(r, θ, t) au contact de la paroi chaude est égale à la température T_0 de l'enceinte ;
- Le flux de chaleur vers l'extérieur est connu. Solide isolé thermiquement en surface : flux de chaleur vers l'extérieur est nul.

5. Régime stationnaire sous sans terme de source

On considère un mur supposé infini dans las directions y et z, d'épaisseur L, dont les deux faces ont les T : T_0 et T_1.

En régime stationnaire, la température à l'intérieur du mur satisfait l'équation :

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \qquad (11)$$

La température varie linéairement entre T_0 et T_1 selon la loi :

$$T(x)=T_0=(T_1-T_0)\frac{x}{L}$$

Le flux de chaleur à travers une surface S, c'est à dire la puissance thermique transmise dans la direction ox, est uniforme à l'intérieur du mur :

$$P=-\lambda.S.\frac{dT}{dx}=S.\lambda.\frac{T_0-T_1}{L}$$

Mur simple en tenant compte de la convection

Si l'on choisi comme conditions limites non plus les températures T_0 et T_1 des faces P_0 et P_1, mais celles θ_0 et θ_1 des milieux ambiants baignant respectivement ces faces. Le flux de à travers le plan P_0 st donné par la loi de Newton :

$$\Phi_0=h_0.S.(\theta_0-T'_0)$$

$$\Phi_1=h_1.S.(T'_1-\theta_1)$$

h_1 et h_0 **($Wm^{-2}K^{-1}$)** sont les coefficients superficiels d'échange relatifs à ces faces et T'0 et T'1 leurs températures (inconnues ici). Nous avons montré que le flux à travers le mur est :

$$\Phi=S.\lambda.\frac{T_0-T_1}{L}$$

il y'a continuité des températures et des flux au niveau des interfaces donc :

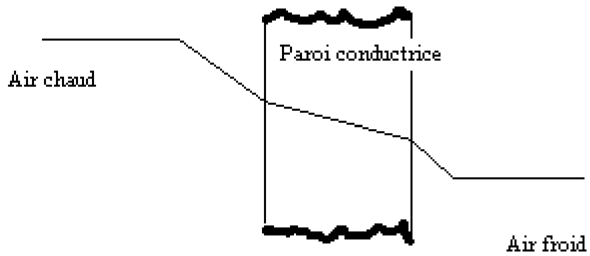
$T'_0 = T_0$ et $T'_1 = T_1$

$\Phi_0 = \Phi$ et $\Phi_1 = \Phi$

Par suite :

$$\Phi = \frac{(\theta_0 - T_0)}{\frac{1}{h_0.A}} = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{L}{\lambda.A}} = \frac{(T_1 - \theta_0)}{\frac{1}{h_1.A}}$$

Calcul des températures T_0 et T_1 des deux faces de mur simple :



Si l'on représente les deux couches limites de fluide par des résistances thermique R_{air}, on peut évaluer les températures T_0 et T_1 en fonction de θ_0 et θ_1 :

$$\Phi = \frac{(\theta_0 - T_0)}{R_{air}} = \frac{(T_0 - T_1)}{R_{mur}} = \frac{(T_1 - \theta_0)}{R_{air}}$$ d'où :

$$T_0 = \theta_0 + \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{2 + \frac{R_{mur}}{R_{air}}}$$

$$T_1 = \theta_1 + \frac{(\theta_0 - \theta_1)}{2 + \frac{R_{mur}}{R_{air}}}$$

Mur simple avec λ= f(T)

On se propose de calculer le flux qui traverse le mur en régime permanent et de déterminer le profil de température dans ce mur :

$\frac{d\Phi}{dx} = 0$ et $\Phi = c_1$

$$\Phi = -\lambda_0.(1 + aT).S.\frac{dT}{dx} = C_1$$

cette équation s'intègre en :

$$T + \frac{a}{2}T^2 = -\frac{C_1}{\lambda_0 . S}.x + C_2$$

Conditions aux limites pour le calcul des constantes c_1 et c_2 :

x = 0 T = T_0 ; $C_2 = T_0 + \frac{a}{2}T_0^2$

x = L T = T_1 ; $T_1 + \frac{a}{2}T_1^2 = -\frac{C_1}{\lambda_0 . S}.L + C_2$

soit $C_1 = \frac{\lambda_0 . S}{L}.(T_0 - T_1)\left[1 + a.\frac{(T_0 + T_1)}{2}\right]$

d'où le flux de chaleur est :

$$\Phi = \lambda_0\left[1 + a.\frac{(T_0 + T_1)}{2}\right]S.\frac{(T_0 - T_1)}{L}$$

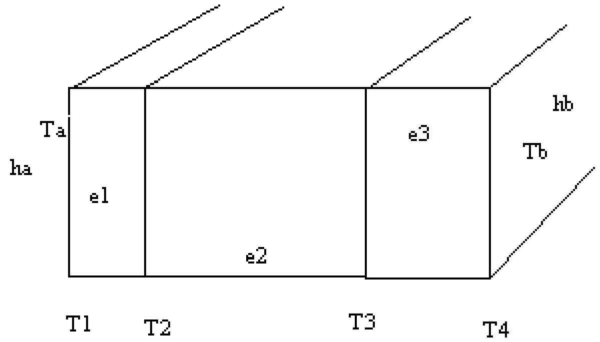
$\lambda_0\left[1 + a.\frac{(T_0 + T_1)}{2}\right]$ n'est autre que la conductivité thermique λ_m du matériau prise à la température moyenne $\frac{T_0 - T_1}{2}$. Ainsi on peut écrire :

$$\Phi = \lambda_m . S.\frac{(T_0 - T_1)}{L}$$

le profil de température est :

$$\frac{(T - T_0)\left[1 + \frac{a}{2}(T_0 + T)\right]}{(T_0 - T_1)\left[1 + \frac{a}{2}(T_0 + T_1)\right]} = -\frac{x}{L}$$

Conduction thermique dans une paroi composite



L'élimination des températures de peau des parois donne par simple addition :

$$T_a - T_b = \left[\frac{1}{h_a.S} + R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{h_b.S}\right].\dot{Q}$$

avec comme résistances au transfert thermique conductif :

$$R_1 = \frac{e_1}{S.\lambda_1} \qquad R_2 = \frac{e_2}{S.\lambda_2} \qquad R_3 = \frac{e_3}{S.\lambda_3}$$

le débit thermique s'écrit donc selon une loi type « loi d'Ohm » :

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_b}{R}$$ et $R = R_a+R_1+R_2+R_3+R_b$ **°C/W**

par définition on note le coefficient global d'échange : $\dot{Q} = U.S.(T_a - T_b)$ où $U = \frac{1}{S.R}$

Ordre de grandeur de quelques flux thermique :

En utilisant les données numériques du cours, donner l'ordre de grandeur des puissances thermiques suivantes :

1. Puissance thermique transmise à travers le fond d'une casserole en Al placée sur une plaque électrique à 300 °C et contenant de l'eau à 20 °C ; rayon du fond de la casserole est de 10 cm et l'épaisseur et de 1 mm

   Rép : P =2 10^{-7} W

2. Puissance transmise par un mur de béton d'épaisseur 30 cm et de surface 15 m^2 séparant une pièce à 20 °C de l'extérieur à 0 °C ;

   Rép : P = 760 W

3. Puissance transmise par une vitre de 2 m^2 dans les mêmes conditions (épaisseur = 1 mm

Rép : $P = 3{,}1\ 10^{4}$

Rq : si l'on souhaite jouir du paysage sans se ruiner en bois de chauffage (et détruire la forêt qu'on projetait d'admirer), il faut adopter un double vitrage.

Intérêt d'un double vitrage

Un bloque de vitrage isolant est constitué de deux vitres de même épaisseur $e_1 = 1$ mm séparées par un espace d'épaisseur $e_2 = 2$ mm contenant de l'air sec.

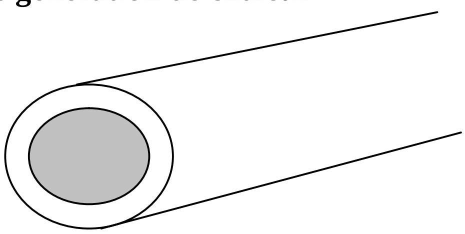
1. calculer la résistance thermique d'une surface S = 1 m2 de cette double vitre et évaluer l'épaisseur du bloc de verre homogène équivalent.

   Montrer que la vitre intérieure et la vitre extérieure sont pratiquement thermalisées aux températures θ_{int} et θ_{ext}

   Solution :

5. Conduction dans les couches cylindrique

conduction sans génération de chaleur



Raisonnement p/r au flux de chaleur :

$\Phi_r - \Phi_{r=dr} = 0$, $\qquad \dfrac{d\Phi_r}{dr} = 0$ $\qquad$ d'où, $\Phi_r = C_1$

en exprimant ce flux par la loi de Fourier :

$\Phi = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r} S = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$ $\qquad$ d'où ; $\Phi = -\lambda 2\pi r L \dfrac{dT}{dr} = C_1$

Après intégration : $\quad T = -\dfrac{C_1}{2\pi\lambda L} . In r + C_2$

Et $\quad C_1 = 2\pi\lambda L \dfrac{(T_0 - T_1)}{In \dfrac{r_1}{r_0}}$ $\qquad$ et $\qquad C_2 = T_0 + \dfrac{(T_0 - T_1)}{In \dfrac{r_1}{r_0}} . In r_0$

D'où les expressions du flux :

$\Phi = 2\pi\lambda L \dfrac{(T_0 - T_1)}{In \dfrac{r_1}{r_0}}$ $\qquad$ et le profil est : $\qquad \dfrac{(T - T_0)}{(T_1 - T_0)} = \dfrac{In \dfrac{r}{r_0}}{In \dfrac{r_1}{r_0}}$

Rq : le flux peut s'exprimer par : $\Phi = \lambda A_{mL} \dfrac{(T_0 - T_1)}{L}$, où A_{mL} est la moyenne logarithmique des aires des surfaces A_0 et A_1.

$A_{mL} = \dfrac{A_1 - A_0}{In \dfrac{A_1}{A_0}}$ $\qquad$ avec $\quad A_0 = 2\pi\, r_0\, L$ $\qquad$ et $\qquad A_1 = 2\pi\, r_1\, L$

on trouve donc : $\quad A_{mL} = \dfrac{2\pi L . (r_1 - r_0)}{In \dfrac{r_1}{r_0}}$

donc : $$\Phi = \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{In\frac{r_1}{r_0}}{2\pi\lambda L}}$$

Rq : Si l'on impose comme conditions limites les températures des milieux ambiants baignant les surfaces de la couche cylindrique :

$$\Phi = \frac{(\theta_0 - \theta_1)}{\frac{1}{h_0 S_0} + \frac{In\frac{r_1}{r_0}}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{h_1 S_1}} = \frac{(\theta_0 - \theta_1)}{\frac{1}{h_0 S_0} + \frac{e}{\lambda A_{mL}} + \frac{1}{h_1 S_1}}$$

Cas ou la conductivité varie avec la température

Couche cylindrique simple :

$\lambda = f(T)$ suivant la loi : $\lambda = \lambda_0(1+aT)$

On se propose de calculer le flux de chaleur qui traverse la couche en régime permanent et de déterminer le profil de la température dans cette couche :

On trouve :

Pour le flux : $$\Phi = 2\pi.\lambda_m.L\frac{(T_0 - T_1)}{In\frac{r_1}{r_0}}$$ avec $$\lambda_m = \lambda_0\left[1 + \frac{a}{2}(T_0 - T_1)\right]$$

Pour le profil de température :

$$\frac{(\theta - \theta_0)}{(\theta_1 - \theta_0)} \cdot \frac{\left[1 + \frac{a}{2}(\theta + \theta_0)\right]}{\left[1 + \frac{a}{2}(\theta_1 + \theta_0)\right]} = \frac{In\frac{r}{r_0}}{In\frac{r_1}{r_0}}$$

Couche cylindrique composite :

On pose $r_0, r_1, \ldots, r_n$, les rayons des faces ou interface successives

Après calcul le flux est exprimé par l'équation suivante :

$$\Phi = \frac{(\theta_0 - \theta_n)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{In \frac{r_i}{r_{i-1}}}{2\pi\lambda L}}$$

6. Conduction dans les couches sphériques sans génération de chaleur

$\Phi_r - \Phi_{r+dr} = 0$ implique : $\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = C_1 = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$

Après calcul et en tenant compte des conditions aux limites on trouve :

Pour le flux : $$\Phi = 4\pi\lambda . r_0 r_1 . \frac{(T_0 - T_1)}{(r_1 - r_0)}$$

Pour le profil de température : $$T = T_0 - (T_0 - T_1) \frac{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$$

Rq₁ : L'expression du flux peut se mettre sous la forme :

$\Phi = \lambda A_m \frac{(T_0 - T_1)}{e}$ avec, $A_m = (S_0 . S_1)^{\frac{1}{2}}$

et, $e = r_1 - r_0$ $S_0 = 4\pi r_0^2$ $S_1 = 4\pi r_1^2$

Rq₂ : La résistance thermique d'une couche sphérique s'exprime par :

$$R = \frac{(r_1 - r_0)}{4\pi\lambda . r_0 r_1} = \frac{e}{A_m \lambda}$$

7. Calorifugeage des surfaces

On pourrait penser qu'il suffit de recouvrir une surface par une couche d'un matériau peu conducteur pour réduire les pertes thermique, et que plus l'épaisseur de revêtement est important, plus les pertes sont faibles. Ceci est exact pour des surfaces planes, mais ne l'est pas toujours pour des surfaces courbes

Epaisseur critique d'un calorifuge :

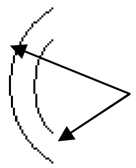
Considérant par exemple une surface S_0 de rayon r_0 à la température θ_0 et supposons cette face placée dans un milieu à une température ($\theta_0 > \theta_a$).

En l'absence de calorifuge, le flux de chaleur qui se propage à travers la surface est :

$$\Phi = h 2\pi L r_0 (\theta_0 - \theta_a)$$

plaçant autour de la surface une couche de calorifuge de conductivité λ et d'épaisseur e.

posant : $\boxed{\mathbf{r = r_0 + e}}$



après calcul du bilan et en posant $h_{\text{calo-ext}} = h_{\text{sur-ext}}$

$$\Phi = \frac{(\theta_0 - \theta_1)}{\dfrac{\mathrm{In}\dfrac{r}{r_0}}{2\pi\lambda L} + \dfrac{1}{h 2\pi r L} + \dfrac{1}{h 2\pi r_0 L}}$$

Examinons les variations du flux Φ avec l'épaisseur du calorifuge ou encors avec le rayon extérieur r de la couche de calorifuge.

$R = \dfrac{\mathrm{In}\dfrac{r}{r_0}}{2\pi\lambda L} + \dfrac{1}{h 2\pi r L} + \dfrac{1}{h 2\pi r_0 L}$ est la résistance thermique totale du calorifuge.

En dérivant : $\dfrac{dR}{dr} = \dfrac{1}{2\pi\lambda}\left[\dfrac{1}{\lambda r} - \dfrac{1}{h r^2}\right]$

$\dfrac{dR}{dr} = 0$, $\qquad r = r_c = \dfrac{\lambda}{h}$, $\qquad$ avec rc = rayon critique du calorifuge

- Si $r<r_c$, $\frac{dR}{dr}<0$, R $\searrow$ lorsque r(ou **e**)

  Φ $\nearrow$ lorsque **e** $\nearrow$

- Si $r>r_c$, $\frac{dR}{dr}>0$, R $\nearrow$ lorsque r(ou **e**) $\nearrow$

  Φ $\searrow$ lorsque **e** $\nearrow$

Rq : Dans la pratique on doit distinguer deux cas :

1. $r \geq \frac{\lambda}{h} = r_c$ avec $\mathbf{r_c} = \mathbf{r_0} + \mathbf{e_c}$

dans ce cas $\forall$ **e** **r** est nécessairement $\geq r_c$ et le flux thermique $\mathbf{\Phi}$ $\searrow$, $\forall$ **e**

2. $r > \frac{\lambda}{h}$, dans ce cas le $\mathbf{\Phi}$ $\nearrow$ avec l'épaisseur **e** jusqu'à ce que $\mathbf{e} = \mathbf{e_c}$.

La conductivité thermique d'un calorifuge efficace doit donc être tq :

$r_0 > \frac{\lambda}{h}$, soit $\lambda < r_0 h$